Petre Năchilă

Cătălin Eugen Năchilă

Matematică pentru toți

Clasa a IX-a

Științele naturii, filiera tehnologică – toate specializările

Editura NOMINA

Cuprins

ENUNȚURI

SOLUȚII

Capitolul 1

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimi

Mulțimea este o colecție de obiecte distincte. Obiectele mulțimii se numesc elemente. Mulțimile se notează cu literele mari ale alfabetului. O mulțime poate fi dată prin enumerarea elementelor sale sau specificând anumite proprietăți pe care le au doar aceste elemente. Dacă a aparține A, notăm $a \in A$. În caz contrar $a \notin A$.

Definiții. **1.** incluziunea: $A \subset B$ dacă pentru orice element $a \in A$ avem $a \in B$;

2. egalitatea: $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Operații cu mulțimi

1. reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;

2. intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;

3. diferența: $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$;

4. complementara: dacă $A \subset E$, $C_E A = E - A$;

5. produs cartezian: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Definiții. **3.** *Mulțimea părților unei mulțimi* nevide A este mulțimea:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

4. Dacă A este o mulțime finită, numărul elementelor lui A se numește *cardinalul* mulțimii A (notat cu card A).

Teorema 1. Dacă card $A = n \in \mathrm{N}$, atunci card $\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Teorema 2. Dacă card $A = m$, card $B = n$, $m, n \in \mathrm{N}$, atunci card $(A \times B) = mn$.

Teorema 3. Relația de incluziune are proprietățile:

a) reflexivă: $A \subset A$;

b) antisimetrică: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) tranzitivă: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Teorema 4. Relația de egalitate are proprietățile:

a) reflexivitate: $A = A$;

b) simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$;

c) tranzitivă: $A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

Teorema 5. Operațiile cu mulțimi au următoarele proprietăți:

a) comutativitatea: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

b) asociativitate: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$:

c) independență: $A \cap A = A$; $A \cap A = A$;
$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

d) distributivitatea reuniunii (intersecției) față de intersecție (reuniune):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

e) reuniunea (intersecția) are proprietatea de absorbție față de intersecție (reuniune):

$$A \cap (A \cup B) = A;$$
$$A \cup (A \cap B) = A.$$

f) pentru orice mulțime $B \subset A$ avem $A \cup B = A$; $A \cap B = B$.

g) Legile lui Morgan: pentru orice $A \subset E$, $B \subset E$ avem $C \in (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

h) Dacă $A \subset E$, avem $C_E(C_E A) = A$; $C_E E = \varnothing$, $C_E \varnothing = E$.

i) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție, reuniune, diferență:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$; $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

j) card $(A \cup B)$ = card A + card B – card $(A \cap B)$.

Probleme rezolvate

1. Principiul includerii și excluderii. Fie A, B, C mulțimi finite. Demonstrați că:

a) card$(A \cup B)$ = card A + card B – card$(A \cap B)$;

b) card$(A \cup B \cup C)$ = card A + card B + card C – card$(A \cap B)$ – card$(A \cap C)$ – – card$(B \cap C)$ + card$(A \cap B \cap C)$.

Soluție. a) Fie card $A = m$, card $B = n$. Dacă $A \cap B = \varnothing$, avem card$(A \cap B)$ = card $\varnothing$ = $= 0 \Rightarrow$ card$(A \cap B) = m + n$ = card A + card B. Dacă $A \cap B \neq \varnothing$, în cele $m + n$ = = card A + card B elemente, elementele comune au fost luate de două ori, o dată în A și altă dată în B. Pentru a obține card$(A \cup B)$, din $m + n$ se scade card$(A \cap B)$.

b) card$(A \cup B \cup C)$ = card$((A \cup B) \cup C)$ = card$(A \cup B)$ + card C – card$((A \cup B) \cap$ $\cap\, C)$ = card A + card B + card C – card$(A \cap B)$ – card$[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$ = card A + + card B + card C – card$(A \cap B)$ – card$(A \cap C)$ – card$(B \cap C)$ + card$(A \cap B \cap C)$.

2. Demonstrați că pentru orice mulțimi A și B avem $(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Soluție. Fie $X = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Atunci, dacă $M \in X$, avem $M \in \mathcal{P}(A)$ sau $M \in \mathcal{P}(B)$ și deci $M \subset A$ sau $M \subset B$. Rezultă că $M \subset (A \cup B)$ și deci $M \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Observație. Demonstrați că $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ dacă $A \subset B$ sau $B \subset A$. Într-adevăr, dacă $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ și $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, deci Avem $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) =$ $= \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$. Analog avem „=" pentru $B \subset A$. Presupunem că $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$, adică există $a \in A - B$ și $b \in B - A$. Fie $M = \{a, b\}$. Avem $M \subset (A \cup B)$, $M \in \mathcal{P}(A \cup B)$ și $M \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3. Determinați card A, unde $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| + |b| < 8\}$.

Soluție. Avem $|a| + |b| = n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Pentru $n = 0$ avem soluția $(0, 0)$, iar pentru $n = 7$ avem soluțiile $(0, 7)$, $(0, -7)$, $(7, 0)$, $(-7, 0)$. Pentru $1 \leq n \leq 6$ avem în fiecare caz câte $4n$ soluții. Atunci obținem $\text{card } A = 1 + 4 + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 6) = 113$.

4. Fie mulțimile $A = \{5n - 3 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{10m + 2 \mid m \in \mathbb{N}\}$. Demonstrați că $B \subset A$ și că $A \not\subset B$.

Soluție. $n = 2k + 1 \Rightarrow 5n - 3 = 5(2k + 1) - 3 = 10k + 2 \Rightarrow B \subset A$. Avem $5 \cdot 2 - 3 = 7 \in A$ și $7 \notin B$ și deci $A \not\subset B$.

5. Determinați card A, unde $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \dfrac{n^2 + 3}{n^2 + n}, n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 50 \right\}$.

Soluție. Punem condiția de existență: $n^2 + n \neq 0 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$, $|n| \leq 50$. Determinăm $m, p \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$, $|m| \leq 50$, $p \leq 50$, $m < p$ și $\dfrac{m^2 + 3}{m^2 + m^2} = \dfrac{p^2 + 3}{p^2 + p} \Leftrightarrow (m - p)(mp - 3m - 3p - 3) = 0$. Cum $m \neq p$, avem doar $(m - 3)(p - 3) = 12$. Obținem $(m - 3, p - 3) \in \{(-12, -1), (-6, -2), (-4, -3), (1, 12), (2, 6), (3, 4)\} \Rightarrow (m, p) \in \{(-9, 2), (-3, 1), (2, 15), (5, 9), (6, 7)\}$. Atunci $\text{card } A = (50 \cdot 2 + 1) - 2 - 5 = 94$.

Probleme propuse

1. Determinați mulțimile A și B, știind că:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $A \cap B = \{1, 2\}$;
c) $5 \notin (A - B)$; d) $\text{card } A > \text{card } B$.

2. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Determinați două mulțimi B și C cu proprietățile $B \cup C = A$, $B \cap C = \varnothing$, suma elementelor lui B este egală cu suma elementelor lui C în cazurile:

a) card $B = 6$; card $C = 14$; b) card $B = 7$, card $C = 13$.

3. Determinați mulțimile A formate din trei numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A, x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

4. Determinați mulțimile A formate din 4 numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A, x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

5. Fie mulțimea $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Demonstrați că există mulțimile $B_n, C_n, D_n \subset A_n$, disjuncte două câte două astfel încât $s(B_n) = s(C_n) = s(D_n)$, unde $s(M)$ este suma elementelor lui M.

6. Fie $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Determinați cel mai mic element al mulțimii A_n astfel încât $S(A_n) = 36$.

7. Determinați cel mai mic număr de numere care trebuie scoase din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ astfel încât mulțimea rămasă să poată fi împărțită în două submulțimi disjuncte B și C în care produsele elementelor lor să fie numere egale.

8. Dați exemplu de trei mulțimi A, B și C cu proprietățile $A = B \cup C$, $B \cap C = \varnothing$, card $B = 3$, $p(B) = p(C)$, unde $p(M)$ înseamnă produsul elementelor lui M.

9. Rezolvați problema **8** în cazul $A = \{1, 2, 3, \ldots, 35\}$.

10. Așezați pe un cerc toate numerele de la 1 la 16 astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie număr prim.

11. Determinați mulțimile A, B, C dacă:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
b) $A - (A \cap B) = \{6\}$;
c) $B - (B \cap A) = \{1, 3\}$.

12. Determinați mulțimile A, B, C dacă:
a) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
b) $A \cap B = \varnothing$;
c) $C \subset B$;
d) $A - C = \{1, 3, 7\}$;
e) $B - C = \{5, 9\}$.

13. Rezolvați următoarele ecuații:
a) $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$;
b) $(A - X) \cup (X - A) = \{1, 2, 3\}$, unde $A = \{1, 2\}$;
c) $(A - X) \cup (X - A) = \{1, 4, 5\}$, unde $A = \{1, 2, 3\}$.

14. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A = \{2a + 2\}$, $B = \{b, 2a + 1\}$. În ce condiții avem:
a) card $(A \cup B) = 2$; b) card $(A \cup B) = 3$; c) card $(A \cup B) = 4$.

15. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$, având proprietățile:
i) $2 \in A$, $3 \in A$; ii) $x \in A \Rightarrow 3x - 1 \in A$; iii) $x + 1 \in A \Rightarrow x \in A$
a) Determinați încă 5 elemente din A.
b) Determinați A.

16. Determinați card $(A \cap B)$ dacă:

card $(A \cup B) = 201$; card $(A - B) = 100$ și card $(B - A) = 96$.

17. Determinați card A în cazurile:

a) $A = \left\{ a \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{b}{a} = n^2, n \in \mathbb{N} \right\}$, unde $b = (2^2 - 1)(3^2 - 1)\ldots(99^2 - 1)$;

b) $A = \left\{ \overline{ab} \,\middle|\, \overline{0,aa(b)} + \overline{0,bb(a)} = (0,(6))^2 \right\}$;

c) $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 13 \text{ divide pe } 2^n + 3^n\}$.

18. Fie mulțimile A și B având câte două elemente. Câte elemente pot avea mulțimile:
a) $A \cap B$; b) $A \cup B$?

19. Fie mulțimile $A = \{x = 11n + 8 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x = 4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Determinați $A \cap B$.

20. Fie mulțimile $A = \{x \mid x = n^2 - 4, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = n^2 + 4, n \in \mathbb{Z}\}$. Determinați mulțimea $A \cap B$.

21. Definiți mulțimea $A = \left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \ldots, \frac{19}{23}\right\}$ folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale.

22. Determinați numărul submulțimilor $X = \{x, y, z, t\}$ ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ cu proprietatea $x + y = z + t = 50$.

23. Determinați mulțimile $A \subset \mathbb{R}$ formate din 3 elemente cu proprietatea că dacă $x \in A$, atunci $-\frac{1}{x}$ și $1 + x \in A$.

24. Fie mulțimea $A = \{0, 4, 8, 12, \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Determinați cel mai mic element al șirului, astfel încât suma cifrelor sale să fie 36.

25. Determinați mulțimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu proprietățile:

a) A are cel mult 5 elemente;

b) dacă $x \in A$, atunci $\frac{1}{x} \in A$ și $(1 - x) \in A$.

1.2. Mulțimea numerelor reale

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Rezolvarea unor ecuații de forma $a + x = b$, $a > b$, a dus la considerarea mulțimii $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Rezolvarea unor ecuații de forma $bx = a$, $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $(a, b) \neq 1$, a condus la considerarea mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

Definiția 1. Fracțiile $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, se numesc echivalente dacă $ad = bc$. Mulțimea tuturor fracțiilor lor echivalente cu o fracție dată, se numește număr rațional. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Teorema 1. Adunarea și înmulțirea pe mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ au proprietățile:

1) comutativitate: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$;

2) asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$;

3) 0 este element neutru pentru adunare: $a + 0 = 0 + a = a$;

4) 1 este element neutru pentru înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

5) orice element $a \in \mathbb{Q}$ sau $a \in \mathbb{Z}$ are un opus (notat ca $-a$) : $a + (-a) = 0$;

6) orice element $a \in \mathbb{Q}^*$ are un invers (notat cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$) : $a \cdot a^{-1} = 1$;

7) înmulțirea este distributivă față de adunare: $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Observaţii:

a) În $\mathbb{N}$ doar 0 are opus (pe 0).

b) În $\mathbb{N}$ un singur element este inversabil (1). Inversul lui 1 este 1.

c) În $\mathbb{Z}$, elementele inversabile sunt 1 şi – 1. Avem $(-1)^{-1} = 1$.

Definiţia 2. Spunem că $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $a = b + c$; spunem că $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $a = b + c$.

8) Trichotomie. Pentru orice $a, b \in \mathbb{Q}$ avem $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$;

9) Axioma lui Arhimede. Pentru orice două numere naturale a, b, $a > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \cdot n > b$ (se ia $n = \left[\dfrac{b}{a}\right] + 1$)

• Orice fracţie ordinară se transformă în fracţie zecimală aplicând algoritmul de împărţire a numerelor naturale;

• fracţie zecimală periodică simplă ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ cifre)

$$a_0,(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}}};$$

• fracţie zecimală periodică mixtă ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ cifre)

$$a_0, a_1, a_2 \ldots a_n (b_1 b_2 \ldots b_m) = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{999\ldots9}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{n}}.$$

Teorema 2. Orice număr raţional se reprezintă sub forma unei fracţii zecimale finite sau a unei fracţii zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

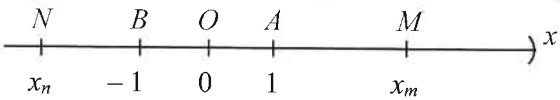
Rezolvarea ecuaţiilor de forma $x^2 = p$, p număr prim, $x \in \mathbb{Q}$, imposibilitatea comparării unor lungimi din geometrie (diagonala cu latura pătratului, lungimea cercului cu diametrul său) au condus la considerarea mulţimii numerelor iraţionale.

Avem $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ (observaţie: $\mathbb{I}$ nu este notaţie consacrată).

Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Exemple de numere iraţionale: $\sqrt{p}$, p număr prim; π.

Axa numerelor reale este o dreaptă pe care s-au fixat: originea O, un sens pozitiv (de la stânga la dreapta) şi o unitate de măsură ($[OA]$ – segment unitate, A la dreapta originii.



Fiecărui număr real $x_m > 0$ îi corespunde un punct unic $M \in (OA$ astfel încât $OM = x_M$ şi reciproc.

Fiecărui număr real $x_n < 0$ îi corespunde un punct unic $N \in (OB$ astfel încât $ON = |x_N| = -x_N$ şi reciproc.

Definiţia 3. Avem $x_M \geq x_N$ dacă $M = N$ sau M este la dreapta lui N.

Definiția 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Avem $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $b = a + c$. Avem $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $b = a + c$.

Observație. Orice număr irațional se reprezintă ca un număr zecimal cu o infinitate de zecimale care nu se succed periodic. Exemplu: 2,13133133313333......

Teorema 3. Între două numere reale există cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional.

Teorema 4. Relația „≤" (respectiv „≥") este o relație de ordine pe $\mathbb{R}$, adică are următoarele proprietăți:

a) reflexivitate: $a \leq a, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

b) antisimetrie: $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$;

c) tranzitivitate: $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a = c$.

Teorema 5. Relația „<" (respectiv „>") are doar proprietatea de tranzitivitate.
O relație reflexivă, antisimetrică și tranzitivă se numește relație de ordine. O relație reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește relație de echivalență.

Teorema 6. Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{R}$ are aceleași proprietăți ca adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{Q}$ (Teorema 1).

Definiția 5. Definim scăderea și împărțirea astfel:

a) $a - b = a + (-b), \forall\, a, b \in \mathbb{R}$; b) $a : b = a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}, \forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, b \in \mathbb{R}^*$.

Definiția 6. Fie $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$; $0^n = 0$.

0^0 este operație fără sens.

Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, definim $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Teorema 7. Puterile cu exponent întreg ale numerelor reale au proprietățile:

a) $(ab)^n = a^n \cdot b^n, \forall\, a, b \in \mathbb{R}^*, \forall\, n \in \mathbb{Z}$;

b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}^*, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$;

c) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall\, a \in \mathbb{R}^*, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$;

d) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}, \forall\, a \in \mathbb{R}^*, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$;

e) $a^m : a^n = a^{m-n}, \forall\, a \in \mathbb{R}^*, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$;

Teorema 8. Pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, avem:

a) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; b) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

c) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

d) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,

e) $a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,

f) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Teorema 9. Legătura dintre relația de ordine și operațiile de adunare și înmulțire pe $\mathbb{R}$ se face prin următoarele proprietăți:

a) $a \leq b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$; b) $a \leq b, c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$;

c) $a \le b,\ c \ge 0 \Rightarrow ac \le bc$, d) $a \le b,\ c < 0 \Rightarrow ac \ge bc$;

e) $0 < a \le b,\ 0 < c \le d \Rightarrow ac \le bd$ și $\dfrac{a}{d} \le \dfrac{b}{c}$.

Probleme rezolvate

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. În ce condiții avem $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$?

Soluție. Din $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c} \Rightarrow a-b=\dfrac{b-c}{bc}$ (1). Analog avem $b-c=\dfrac{c-a}{ac}$ (2), $a-c = \dfrac{b-a}{bc}$ (3). Înmulțind relațiile, rezultă $(a-b)(b-c)(c-a)\cdot a^2b^2c^2=(b-c)(c-a)(a-b)$, de unde $a=b=c$ sau $(abc)^2=1$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$, dacă $a, b, c > 0$.

Soluție. Avem $a^3+b^3+c^3-3abc=\dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \ge 0$.

3. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$.

Soluție. Avem $\left(\dfrac{a}{b+c}+1\right)+\left(\dfrac{b}{a+c}+1\right)+\left(\dfrac{c}{a+b}+1\right) \ge \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right) \ge \dfrac{9}{2}$ (*). Fie $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$, $x+y+z = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$ și relația (*) devine $A=(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \ge 9 \Leftrightarrow 3+\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}\right)+ \left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right) \ge 9$. Cum $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z} \ge 2 \Leftrightarrow (y-z)^2 \ge 0$, avem $A \ge 3+2+2+2=9$.

Probleme propuse

Demonstrați inegalitățile:

1. $a^n > a^{n-1}$, $a > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $a^n < a^{n-1}$, $a \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $(a^m-b^m)(a^n-b^n) \ge 0$, $0 < a \le b$, $m, n \in \mathbb{N}$.

4. $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5. $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

6. $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\geq\dfrac{1}{1+ab}$, $a>0, b>0, ab\geq 1$.

7. $a^3+b^3\geq ab(a+b)$, $a, b\geq 0$.

8. $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\geq\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$; $a, b\in\mathbb{R}, x>0, y>0$.

9. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}$, $a, b, c>0, x, y, z>0$.

10. $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$.

11. $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq a+b+c$.

12. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a+b=4$. Arătați că $a^4+b^4\geq 32$.

13. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a+b\geq 2$. Arătați că $a^4+b^4\geq 2$.

14. Fie $a, b, c>0$, astfel încât $a+2b+3c=14$. Demonstrați că $a^2+b^2+c^2\leq 14$.

15. Fie $a>0$, $b>0$. Să se demonstreze inegalitatea $\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{a}\geq a^2+b^2$.

16. Fie $a, b, c\in[1, 3]$. Arătați că: $(a+b+c)+3\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\leq 12$.

17. Fie $a>0$, $b>0$, $a+b=1$. Arătați că: $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq\dfrac{25}{2}$.

18. Fie $a, b, c>0$. Arătați că $\dfrac{a}{a+2b+2c}+\dfrac{2}{2a+b+2c}+\dfrac{2}{2a+2b+c}\geq\dfrac{3}{5}$.

19. Fie $x>0, y>0$. Demonstrați că:

a) $x^3+y^3\geq xy(x+y)$;

b) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq\dfrac{x+y}{3}$.

1.3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Aproximări

Definiţii. *Partea întreagă* a unui număr real x (notată cu $[x]$) este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu x: $[x] = n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $n \leq x < n + 1$.

Exemple: $[2, 43] = 2$; $[-2, 43] = -3$.

Partea fracționară a numărului real x este $\{x\} = x - [x]$.

Proprietățile ale părții întregi a unui număr real:

a) $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

d) $[x + m] = [x] + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$;

e) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Proprietățile ale părții fracționare a unui număr real:

a) $0 \leq \{x\} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$;

c) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x + m\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Definiţii. 1. Fie numărul real pozitiv $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Aproximările sale cu n zecimale sunt numere raționale, astfel:

- prin lipsă: $a_n' = a_0,a_1a_2\ldots a_n$;
- prin adaos: $a_n'' = a_0,a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$.

Avem $a_n' \leq a < a_n'', \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie numărul real negativ $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Aproximările sale cu n zecimale sunt numere raționale, astfel:

- prin lipsă: $a_n' = a_0,a_1a_2\ldots a_n - 10^{-n}$;
- prin adaos: $a_n'' = a_0,a_1a_2\ldots a_n$.

Avem $a_n' < a \leq a_n'', \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Probleme rezolvate

1. Determinați partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a) 3,12; b) –6,29; c) $\sqrt{2} - 1$; d) $\sqrt{3} - 3$.

Soluție. a) $[3,12] = 3$; $\{3,12\} = 0,12$; b) $[-6,29] = -7$; $\{-6,29\} = x - [x] = -6,29 + 7 = 0,71$; c) $0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow [\sqrt{2} - 1] = 0$; $\{\sqrt{2} - 1\} = \sqrt{2} - 1$; d) $\sqrt{3} - 3 \in (-2, -1) \Rightarrow [\sqrt{3} - 3] = -2$; $\{\sqrt{3} - 3\} = \sqrt{3} - 3 - (-2) = \sqrt{3} - 1$.

2. Demonstrați că:

a) $[x+n]=[x]+n,\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$; b) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x],\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Soluție. a) Dacă $x\in[m,m+1)$, $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+n\in[m+n,m+n+1)\Leftrightarrow[x+n]=m+n=[x]+n$; b) Fie $A=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$, $B=[2x]$, $x=n+\alpha$, $n\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in[0,1)$. Avem $n=[x]$, $\alpha=\{x\}$; i) $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow[x]=n$, $x+\frac{1}{2}=n+\alpha+\frac{1}{2}$, $\alpha+\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ și $2x=2n+2\alpha\in[2n,2n+1)\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$, $[2x]=2n\Rightarrow A=B$; ii) Dacă $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow[x]=n$, $x+\frac{1}{2}=n+\alpha+\frac{1}{2}\in\left[n+1,n+1+\frac{1}{2}\right)$, $2x=2n+2\alpha\in\left[2n+1,2n+\frac{1}{2}\right)$, $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n+1$, $[2x]=2n+1$ și avem $\Rightarrow A=B=2n+1$. Cum n a fost luat arbitrar, rezultă că identitatea b) este valabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvați ecuația $\left[\frac{x+4}{3}\right]=\frac{x+3}{4}$, $x\in\mathbb{R}$.

Soluție. Notăm $\left[\frac{x+4}{3}\right]=n\in\mathbb{Z}$. Avem $\frac{x+3}{4}=n\Leftrightarrow x=4n-3$, $\frac{x+4}{3}=\frac{4n+1}{3}$. Cum $\left[\frac{x+4}{3}\right]=n$, rezultă $n\le\frac{4n+1}{3}<n+1\Leftrightarrow-1\le n<2\Leftrightarrow n\in\{-1,0,1\}\Rightarrow x\in\{-7,-1,1\}$.

4. Rezolvați ecuația $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[2x+1]$.

Soluție. Membrul stâng este $[3x]$ (din inegalitatea lui Hermite). Notând $[3x]=[2x+1]=n\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left[\frac{n}{3},\frac{n+1}{3}\right)\cap\left[\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}\right)$. Ecuația are soluții dacă și numai dacă:

i) $\frac{n}{3}\le\frac{n-1}{2}<\frac{n+1}{3}$ sau ii) $\frac{n}{3}\le\frac{n}{2}<\frac{n+1}{3}$ sau iii) $\frac{n-1}{2}\le\frac{n}{3}<\frac{n}{2}$ sau iv) $\frac{n}{3}\le\frac{n+1}{2}<\frac{n+1}{3}$.

Obținem $n\in\{0,1,2,3,4\}$. Dacă $n=0\Rightarrow x\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\cap\left[-\frac{1}{2},0\right)=\varnothing$. Dacă $n=1\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cap\left[0,\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$. Dacă $n=2\Rightarrow x\in\left[\frac{2}{3},1\right)$. Dacă $n=3\Rightarrow x\in\left[1,\frac{4}{3}\right)$. Dacă $n=4\Rightarrow x\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right)$. Avem $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3},\frac{4}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right)$.

5. Rezolvați ecuația $\left[\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right] = x$.

Soluție. $x = 0$ este soluție. Fie $x \in \mathbb{N}^*$. Avem $\dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \dfrac{1}{x^2+1} \in (1, 2) \Rightarrow \left[\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right] =$ $=1$. Atunci $A = \{0, 1\}$.

Probleme propuse

1. Scrieți aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu n zecimale, unde $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ pentru numerele:

a) $3{,}24375$; b) $-2{,}4689$; c) $2{,}(36)$; d) $-3{,}(435)$; e) $4{,}12(7)$;
f) $-5{,}63(26)$; g) $3\dfrac{1}{4}$; h) $-12\dfrac{4}{125}$; i) $\dfrac{7}{250}$; j) $-2{,}000003$.

2. Ordonați crescător numerele:

a) $1{,}(23)$; $1{,}23$; $1{,}2(3)$; $1{,}23(4)$; $1{,}2(34)$;
b) $-2{,}1(4)$; $-2{,}15$; $-2{,}145$; $-2{,}1(43)$; $-2{,}14(5)$.

3. Demonstrați că:

a) $x \geq 0 \Leftrightarrow [x] \geq 0$; b) $x \leq 0 \Leftrightarrow [x] \leq 0$; c) $[[x]] = [x]$.

4. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem inegalitățile echivalente:

a) $[x] \leq x < [x] + 1$; ii) $x - 1 < [x] \leq x$.

5. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ avem:

a) $x < m \Leftrightarrow [x] < m$; b) $m \leq x \Leftrightarrow m \leq [x]$; c) $m < x \Leftrightarrow m \leq [x]$.

6. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $[x] = [y]$. Demonstrați că $|x - y| < 1$. Reciproca este adevărată?

7. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\{x\} = \{y\}$. Demonstrați că $x - y \in \mathbb{Z}$.

8. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc relațiile:

a) $[-x] = \begin{cases} -[x], \text{ dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$; b) $[-x] + [x] = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{Z} \\ -1, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$;

c) $[-x] \leq -[x]$; d) $[-x] \leq x \leq -[x]$.

9. Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

a) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$; b) $[x] - [y] - 1 \leq [x - y] \leq [x] - [y]$;

10. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow [xy] \geq [x] \cdot [y]$; b) $x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow [x] \cdot [y] \leq [x] \cdot [y]$;
c) $y \leq 0 \leq x \Rightarrow$ i) $[x[y]] \leq [y[x]]$; ii) $[x] \cdot [-y] \leq -[x \cdot y]$; iii) $[x] \cdot [-y] \leq -[x] \cdot [y]$.

11. Fie $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci au loc inegalitățile:

a) $[x]^n \le [x^n]$, $\forall\, x \ge 0$;

b) $[x]^n \le [x^n]$, $\forall\, x \le 0$, n impar;

c) $[x]^n \ge [x^n]$, $\forall\, x \le 0$, n par.

12. Demonstrați că:

a) $\left[\dfrac{1}{a}\right] = [a] \Leftrightarrow a = \pm 1$;

b) $[n] + [-n] = 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$.

Rezolvați ecuațiile:

13. $\left[\dfrac{2x+1}{3}\right] = 4$.

14. $\left[\dfrac{x+5}{2}\right] = \dfrac{x+4}{3}$.

15. $\left[\dfrac{3x+4}{7}\right] = \dfrac{x+1}{2}$.

16. $\left[\dfrac{-x-3}{3}\right] = \dfrac{x+1}{4}$.

17. $\left[\dfrac{2x+1}{3}\right] = \dfrac{2x-1}{2}$.

18. $\left[\dfrac{3x-1}{2}\right] = \dfrac{3x+1}{2}$.

19. $\left[\dfrac{2x-1}{5}\right] = \left[\dfrac{2x+1}{5}\right]$.

20. $\left[x - \dfrac{1}{6}\right] + \left[x + \dfrac{1}{3}\right] = 3x - 2$.

21. $[|x|] = |[x]|$.

22. $x = \dfrac{\{x\}}{[x]}$.

23. $x \cdot [x] = \{x\}$.

24. $[x + |x|] = |x + [x]|$.

25. $\left[\dfrac{x-1}{3}\right] + \left[\dfrac{2x+1}{6}\right] = 4$.

26. $\left[\dfrac{2x-1}{2}\right] + \left[\dfrac{6x-1}{6}\right] + \left[\dfrac{6x+1}{6}\right] = 3$.

27. $\left[x - \dfrac{1}{4}\right] + \left[x + \dfrac{1}{4}\right] = [2x]$.

28. $\left[x - \dfrac{1}{3}\right] + [x] + \left[x + \dfrac{1}{3}\right] = [2x+1]$.

29. $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = x + 1$.

30. $\left[\dfrac{2x+1}{3}\right] = \{x\}$.

31. $\left\{\dfrac{3x-1}{2}\right\} = \dfrac{2}{3}$.

32. $\left[\dfrac{x+1}{2}\right] = \left[\dfrac{x+2}{3}\right]$.

33. Determinați partea fracționară a numărului a, unde:

a) $a = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

34. Determinați partea întreagă a numărului a, unde:

a) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

b) $a = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.4. Modulul unui număr real

Definiție: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

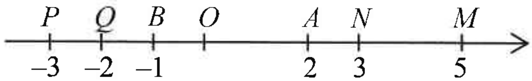
Proprietățile modulului numerelor reale

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, avem:

1) $|x| \geq 0$, $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $|-x| = |x|$, $|x^2| = x^2 = |x|^2$;
3) $|x| = \max(-x, x)$;
4) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
5) $|x - y| \leq |x| + |y|$;
6) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
7) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;
8) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;
9) $||x| - |y|| \leq |x + y|$;
10) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
11) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
12) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$;
13) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a$.

Definiție: *Modulul* sau *valoarea absolută* a numărului real x este distanța de la origine la punctul de abscisă x.

Exemple: $|2| = OA = 2$;
$|-1| = OB = 1$.



Observație: Fie $M(x)$, $N(y)$ puncte pe axa numerelor. Atunci distanța de la M la N este $MN = |x - y| = |y - x|$.

Exemple: $MN = |5 - 3| = 2$; $MQ = |5 - (-2)| = 7$; $NQ = |3 - (-3)| = 6$ (sau $NQ = |-3 - 3| = 6$).

Probleme rezolvate

1. Determinați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

a) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inegalitatea triunghiului);

b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Soluție. a) i) $a \geq 0$, $b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$ și $|a + b| = a + b = |a| + |b|$ (avem egalitate);
ii) $a \leq 0$, $b \leq 0 \Rightarrow a + b \leq 0$ și $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$ (avem egalitate);
iii) $a \geq 0$, $b \leq 0 \Rightarrow |a| \geq a$, $|b| = -b$. Dacă $a + b \geq 0 \Rightarrow |a + b| = a + b \leq a = |a| \leq |a| + |b|$. Dacă $a + b \leq 0 \Rightarrow |a + b| = -a - b = -a + |b| \leq |b| \leq |b| + |a|$; iv) $a \leq 0$, $b \geq 0$ analog cu iii);
b) $|a| = |a - b + b| = |(a - b) + b| \overset{a)}{\leq} |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$ (1); $|b| = |b - a + a| = |(b - a) + a| \overset{a)}{\leq} |b - a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Rezolvați geometric ecuația $|x - 3| + |x - 2| = 5$.
Soluție. Fie $x - 3 = 0$, $x + 2 = 0$. Avem $x = 3$, respectiv $x = -2$. Fie $A(3)$, $B(-2)$, $M(x)$.